**Translation** of ***Sume of Consecutive Natural Numbers :*** **Swati Sircar & Sneha Titus_From Azim premji University At Right Angles_August, 2017**

{सरल से कठिन कार्य की ओर – Low Floor High Ceiling Tasks}

# क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग*

**स्वाती सरकार एवं स्नेहा टाइटस**

'सरल से कठिन कार्य की ओर' की शृंखला, यानी Low Floor High Ceiling Tasks (LFHC) को जारी रखते हुए इस बार यह गतिविधि चुनी गई है।

इसमें शुरुआत ऐसे सरल कार्य देकर की जाती है जो बच्चों की उम्र के मुताबिक़ हों और कक्षा के सभी विद्यार्थी इस पर हाथ आज़मा पाएँ। जैसे-जैसे वह गतिविधि आगे बढ़ती है, वैसे-वैसे उसमें शामिल कार्यों की जटिलता बढ़ती जाती है ताकि विद्यार्थी उसे करते हुए स्वयं को अपनी क्षमता की हद तक ले जाएँ। यूँ तो सभी के लिए काफ़ी काम होता है, लेकिन कठिनाई का स्तर बढ़ने पर कम विद्यार्थी कार्यों को पूरा करने में समर्थ हो पाते हैं। तथापि, तात्पर्य यह है कि गतिविधि में सभी विद्यार्थी शामिल होते हैं और वे सभी सम्पूर्ण कार्य के कम-से-कम एक हिस्से को तो पूरा कर पाते हैं।

इस शृंखला को विकसित करते समय यह एहसास हुआ कि हमारी अधिकतर गतिविधियाँ एक पड़ताल से शुरू होती हैं। गणितीय पड़ताल का अर्थ किसी गणितीय स्थिति के अनवरत अन्वेषण से है। यह सवाल सुलझाने से अलग है क्योंकि यह खुली (open-ended) पड़ताल है।

गणितीय पड़ताल में, विद्यार्थियों से अपेक्षा की जाती है कि वे गणितीय स्थिति के आरम्भिक अन्वेषण के बाद स्वयं अपने सवाल प्रस्तुत करेंगे। किसी स्थिति का अन्वेषण, समस्याओं का निरूपण और उनके हल स्वतंत्र गणितीय चिन्तन के विकास का अवसर देते हैं; साथ ही यह गणितीय प्रक्रियाओं जैसे कि डैटा को व्यवस्थित करने एवं अभिलेखन, पैटर्न की तलाश, अटकल लगाने, निष्कर्ष निकालने, अटकलों एवं सामान्यीकरणों का औचित्य सिद्ध करने और व्याख्या करने में शामिल होने का अवसर देते हैं। चिन्तन की यही प्रक्रियाएँ एक व्यक्ति को और अधिक गणित सीखने, अन्य विषयों व रोज़मर्रा की स्थितियों में गणित का उपयोग करने तथा गणितीय (एवं ग़ैर-गणितीय) समस्याओं को हल करने में मददगार होती हैं। गणितीय पड़ताल पर टिका शिक्षण शिक्षार्थियों को गणित के बारे में, विशेषकर गणितीय गतिविधि एवं चिन्तन की प्रकृति

* ***मुख्य शब्द :*** *संख्याएँ (numbers), क्रमागत (consecutive), योग (sum), प्रतिमान (pattern), अंक (digits)*

के बारे में, सीखने की गुंजाइश देता है। यह उन्हें महसूस कराता है कि गणित सीखने में सहज बोध, व्यवस्थित अन्वेषण करना या पता लगाना, अनुमान लगाना, तर्क करना इत्यादि शामिल हैं, तथा यह कि गणित सीखना रटन्त और मौजूदा प्रक्रियाओं का अनुसरण करना नहीं है।

यद्यपि हमने अपने द्वारा की गई पड़ताल पर आधारित सवाल विकसित किए हैं, तथापि हमारा आग्रह है कि आप अपने विद्यार्थियों को स्वयं पड़ताल में जुड़ने दें। इसमें निम्नलिखित सवाल सहायक हो सकते हैं :

- मैंने क्या अवलोकन किया?
- मुझे क्या पता था?
- मैंने क्या खोजा?
- क्या चुनौतीपूर्ण था?
- क्या मैं इसे किसी अन्य तरह से जाँच सकता हूँ?
- कितनी तरह के हल?
- क्या हो अगर मैं ............ बदल दूँ?
- इससे मैं और क्या सिखा/सीख सकता हूँ?

तो, क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग की इस पड़ताल के लिए यह रहे हमारे प्रश्न। हमेशा की तरह, ये सरल से कठिन की ओर जाते हैं :

1. 1 से 50 तक की संख्याओं की जाँच करके ऐसी संख्याएँ चुनें जिन्हें क्रमागत प्राकृत संख्याओं कि एक शृंखला के योगों की तरह लिखा जा सके। उदाहरण के लिए, 3 = 1 + 2; 12 = 3 + 4 + 5, इत्यादि।
2. क्या ऐसी संख्याएँ हैं, जिन्हें एक या अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योगों के रूप में एक से अधिक तरह से लिखा जा सकता है, उदाहरण के लिए, क्या उसी संख्या को दो या तीन क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है?
3. ऐसी संख्याओं का पैटर्न पता कीजिए जिन्हें :
   i. सदैव दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है
   ii. सदैव तीन क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है
4. यदि हम क्रमागत प्राकृत संख्याओं (2n + 1) को जोड़ें और योग N हो, तो N के गुणनखण्डों की पड़ताल कीजिए।
5. यदि हम क्रमागत प्राकृत संख्याओं (2n + 2) को जोड़ें और योग N हो, तो N के गुणनखण्डों की पड़ताल कीजिए।
6. अपनी पड़ताल के आधार पर क्या आप उन संख्याओं के प्रकारों के बारे में सामान्यीकरण कर सकते हैं, जिन्हें दो या अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है?

7. ऐसी संख्या को लेकर, यह पड़ताल करें कि इसे दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में कितनी तरह से लिखा जा सकता है।
8. कौन-सी संख्याओं को दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में नहीं लिखा जा सकता है?

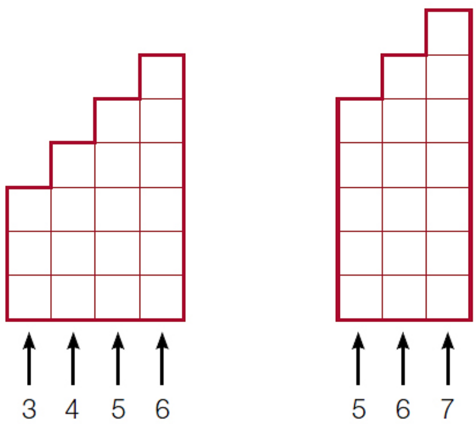
क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग (SCNN) N हो और विषम गुणनखण्ड 2n + 1 हो, तो अनुमान लगाइए कि उस योग (SCNN) में कितने पद होंगे।

## क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग (Sums of Consecutive Natural Numbers [SCNN]–एससीएनएन)

यह बहुत अच्छा उदाहरण है कि कैसे दृश्य निरूपण प्रमाण के बारे में समझ दे सकता है। संख्या 18 को दो तरह से, दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग (SCNN) के रूप में लिखा जा सकता है :

3 + 4 + 5 + 6 और 5 + 6 + 7

एससीएनएन को टाइल्स के कॉलम के रूप में दर्शाया जा सकता है (चित्र-1 में)। 1 से 50 तक संख्याओं की पड़ताल करके यह तय करें कि कौन-सी संख्याओं को SCNN की तरह लिखा जा सकता है और किन्हें नहीं :




**सन्दर्भ-1 से चित्र-1**

i. हम जब दो क्रमागत संख्याओं को जोड़ते हैं तो हमें विषम संख्या मिलती है। $n + (n + 1) = 2n + 1$. इसके उलट कथन : कोई भी विषम संख्या जो $\geq 3$ हो, उसे दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है।

ii. जब हम तीन क्रमागत प्राकृत संख्याओं को जोड़ते हैं तो हमें 3 का गुणक मिलता है।

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

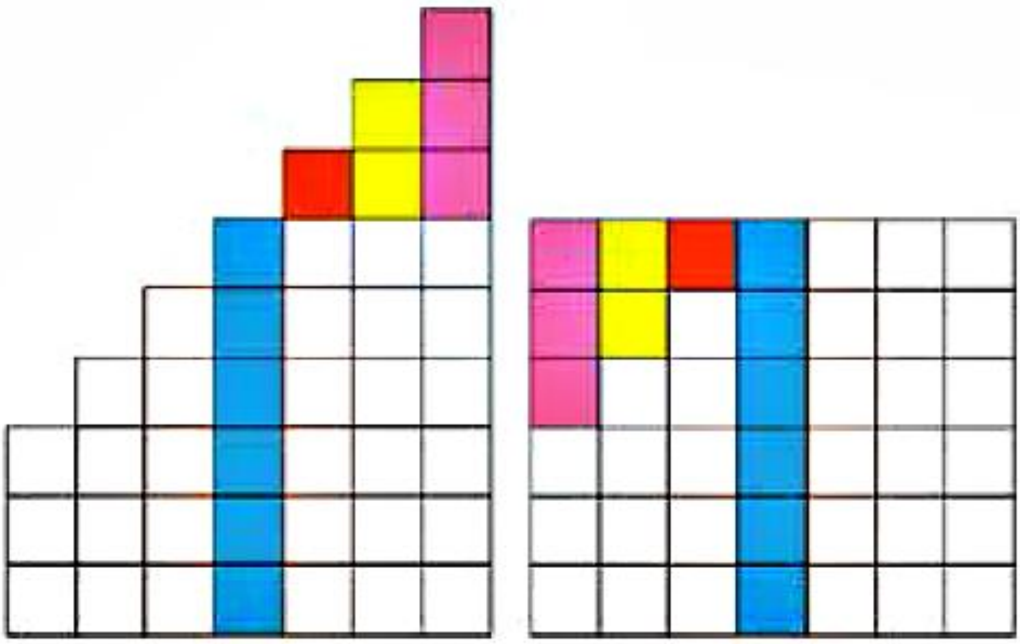
इसके उलट कथन : 3 का कोई भी गुणक जो ≥6 हो, उसे तीन क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है। (i) व (ii) को साथ रखने पर हम देखते हैं कि 3 के विषम गुणक को दो क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में और तीन क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में, दोनों ही तरह से, लिखा जा सकता है।

इससे भी दिलचस्प यह है कि $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$ समीकरण के बाईं ओर का पक्ष हमें विचार करने के लिए एक रोचक दिशा देता है। ध्यान दें कि $(n - 1)$ में -1 की प्रतिपूर्ति $(n + 1)$ में +1 के द्‌वारा हो जाती है।

अब, यदि संख्याओं की संख्या 5, 7, 9 ... हो तो इसे आसानी से आगे बढ़ाया जा सकता है; दरअसल संख्याओं की किसी भी विषम संख्या के लिए इसे आसानी से आगे बढ़ाया जा सकता है।

बीजगणितीय तौर पर, मान लीजिए कि प्राकृत संख्याओं की विषम संख्याओं (उदाहरण के लिए, $2n + 1$), को जोड़ा गया है, तो इसको इस तरह लिखा जा सकता है $(m - n) + \ldots + (m - 2) + (m - 1) + m + (m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + n)$; अर्थात m के दाईं ओर जोड़ी गई प्रत्येक संख्या m के बाईं ओर से घटाई गई है, तो चित्र को फिर से जमाया जा सकता है जैसा कि **चित्र-2** में दिखाया गया है, जिससे कि $m \times (2n + 1)$ का आयत प्राप्त हो।

**चित्र-2**, इसे $n = 3$ और $m = 6$ के लिए दर्शाता है।



**चित्र-2**

इस पुनर्विन्यास के साफ़-सुथरेपन के अलावा, यह भी ध्यान दें कि 2n + 1 क्रमागत प्राकृत संख्याओं का योग विषम संख्या 2n + 1 से भाज्य है। उदाहरण के लिए, जब हम 5 क्रमागत संख्याओं को जोड़ते हैं, मसलन 8 + 9 + 10 + 11 + 12, तो इनका योग 5 से भाज्य है।

तो, क्या हो अगर हम क्रमागत प्राकृत संख्याओं की सम संख्याओं को जोड़ें?

बीजगणितीय तौर पर, मान लीजिए कि प्राकृत संख्याओं की सम संख्याओं (उदाहरण के लिए, 2n + 2), को जोड़ा गया है, तो इसको इस तरह भी लिखा जा सकता है -

$(m - n) + \ldots + (m - 2) + (m - 1) + m + (m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + n) + (m + n + 1)$

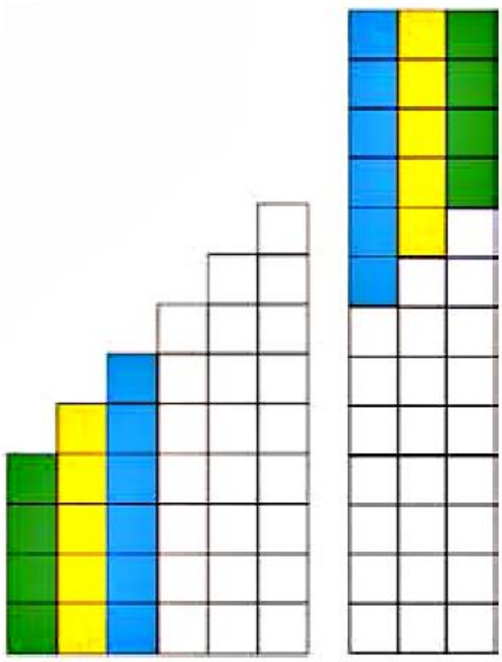
अब, दोनों छोरों से शुरू करके पदों की जोड़ी बनाने, फिर अगले दो पदों की जोड़ी बनाने... और इस तरह अन्ततः मध्य के दोनों पदों की जोड़ी बनाने पर हम पाते हैं :

$$\begin{aligned}(m - n) + (m + n + 1) &= 2m + 1\\ (m - n + 1) + (m + n) &= 2m + 1\\ &\vdots\\ (m - 1) + (m + 2) &= 2m + 1\\ m + (m + 1) &= 2m + 1\end{aligned}$$

और ऐसी (n + 1) जोड़ियाँ हैं, जिससे कि

$(m - n) + \ldots + (m - 2) + (m - 1) + m + (m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + n) + (m + n + 1) = (n + 1) \times (2m + 1)$

**चित्र 3**, इसे n = 2 और m = 6 के लिए दर्शाता है।



चित्र-3

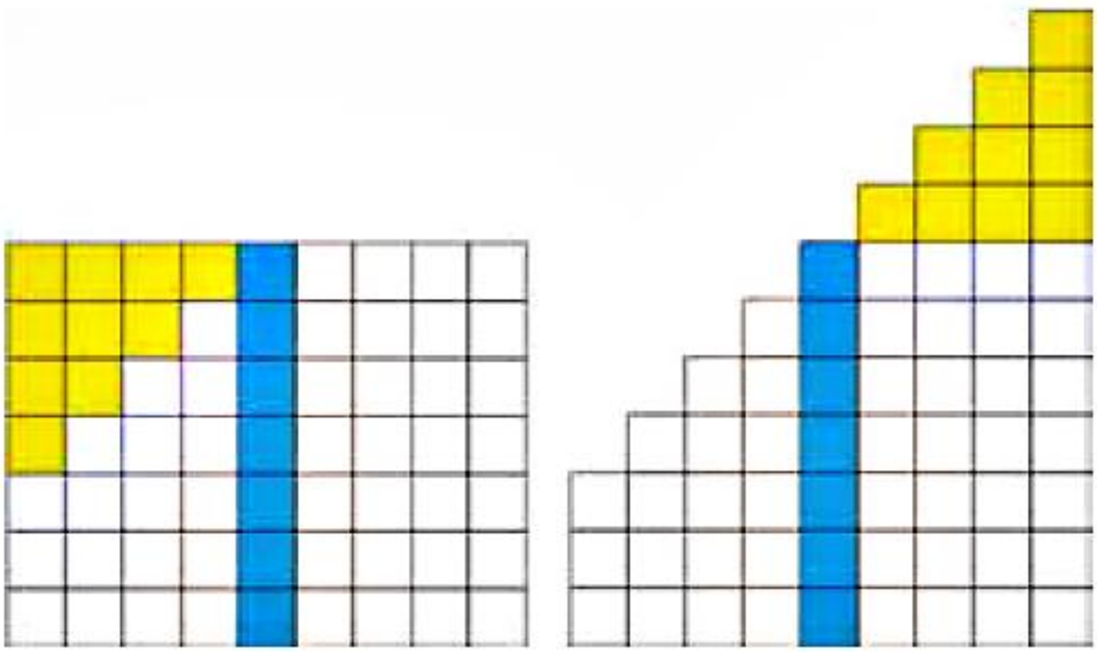
ध्यान दें कि जब 2n + 2 क्रमागत प्राकृत संख्याओं को जोड़ा जाता है, तो इनका योग (n + 1) से भाज्य होता है। इतना ही नहीं, यह 2m + 1 से भाज्य होता है, जो एक विषम संख्या है। उदाहरण के लिए, जब हम 8 क्रमागत संख्याओं को जोड़ते हैं, मसलन 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11, तो इनका योग 4 से और 15 (जो 2 x 7 + 1 है) से भाज्य होता है। इस तरह फिर से जमाई गई आयताकार सरणी की ऊँचाई 15 है क्योंकि 4 + 11 = 5 + 10 = 6 + 9 = 7 + 8 = 15. दूसरे शब्दों में, कॉलम की ऊँचाई (m - n) + (m + n + 1) = 2m + 1 है, जो विषम संख्या है।

इन दो निष्कर्षों को मिलाकर हम देखते हैं कि दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग का हमेशा एक विषम गुणनखण्ड होता है।

तो अब, हम एक बहुत दिलचस्प सवाल पर आते हैं : यदि संख्या N का एक विषम गुणनखण्ड है, तो क्या इसे दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है?

संख्या N का कोई विषम गुणनखण्ड 2n + 1 खोजें और N = m × (2n + 1) टाइल्स की सरणी बनाएँ। यदि हम टाइल्स को सीढ़ीनुमा जमा सकें तो N को दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है। संख्याओं के साथ आगे अधिक अन्वेषण से पता चलता है कि यह मुख्यतः दो तरह से किया जा सकता है :

**क.** जब m > n :



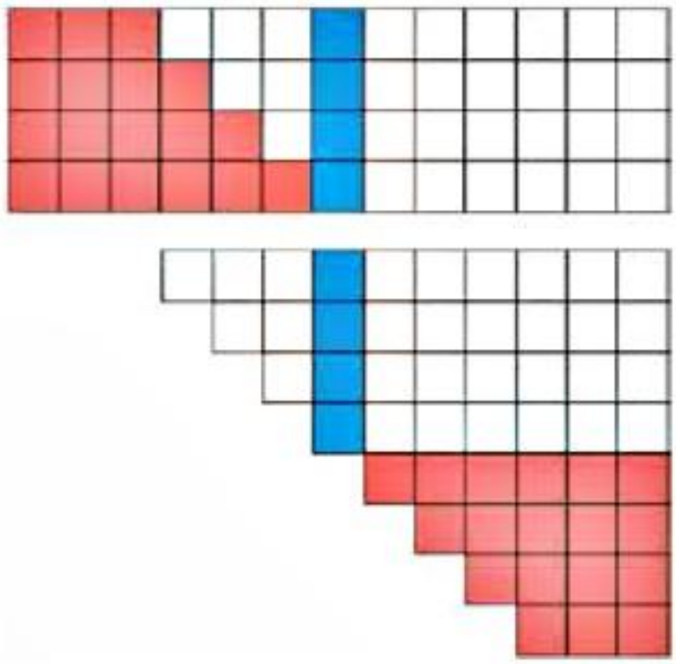
**चित्र-4**

(2n + 1) कॉलमों में से, प्रथम n कॉलमों (प्रत्येक की लम्बाई m) को लें और n, (n - 1) ... 2, 1 सोपानों को काट दें। इन सोपानों को 180° घुमा दें और इन्हें अन्तिम कॉलम n के ऊपर रख दें। यह 2n + 1 क्रमागत प्राकृत संख्याओं m - n, m - n + 1, ... m + n का योग देता है।

**चित्र-4**, m = 7 और n = 4 की स्थिति को बताता है।

**ख.** जब m < n :
ज़ाहिर ही है कि हम क्यों उपर्युक्त विधि का उपयोग नहीं कर सकते हैं।

सरणी के बाएँ छोर से n, (n - 1) ... (n - (m - 1)) सोपानों को काट दें। इन्हें 180° घुमा दें और शेष पंक्तियों के नीचे रख दें जिससे कि योग (n - m + 1) + ... + n + (n + 1) + ... + (2n + 1 - (n - m + 1)) प्राप्त हो, अर्थात, (n - m + 1) + ... + n + (n + 1) + ... + (n + m).



**चित्र-5**

हम यह पाठकों के अन्वेषण पर छोड़ देते हैं कि m = n होने पर क्या होगा और, विशेषकर, उस मामले में N किस तरह की संख्या निकलेगी।

मान लें कि ऐसी संख्या N है, जिसमें कम-से-कम एक विषम गुणनखण्ड हो, तो इसे SCNN के रूप में कितने तरीक़ों से लिखा जा सकता है?

यदि $N = 2^a \times p_1^{b_1} \times ... \times p_k^{b_k}$ जहाँ $p_1$ , ... , $p_k$ विषम अभाज्य संख्याएँ हों, तो वहाँ पर $(b_1 + 1), ... (b_k + 1) - 1$ विषम गुणनखण्ड > 1 होंगे, अर्थात, सम्भावित एससीएनएन $(b_1 + 1) ... (b_k + 1) - 1$ होंगे।

उदाहरण के लिए, $N = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ के पाँच विषम गुणनखण्ड $(2 + 1)(1 + 1) - 1 = 5$ है, यानी 3, 5, 9, 15, 45

$2n + 1 = 3 \Rightarrow m = 360 \div 3 = 120 \Rightarrow N = 119 + 120 + 121$

$2n + 1 = 5 \Rightarrow m = 360 \div 5 = 72 \Rightarrow N = 70 + 71 + 72 + 73 + 74$

$2n + 1 = 9 \Rightarrow m = 360 \div 9 = 40 \Rightarrow N = 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 + 44$

$2n + 1 = 15 \Rightarrow m = 360 \div 15 = 24 \Rightarrow N = 17 + ... + 24 + ... + 31$

$2n + 1 = 45 \Rightarrow m = 360 \div 45 = 8 \Rightarrow N = 15 + ... + 22 + 23 + ... + 30$

अलग-अलग संख्याओं को आज़माना और यह देखना एक अच्छा विचार होगा कि प्रत्येक विषम गुणनखण्ड के लिए एक अद्वितीय SCNN है।

पाठक को हमारा परामर्श है कि N और उसके विषम गुणनखण्ड 2n + 1 के मद्देनज़र किसी भी एससीएनएन में पदों की संख्या का पूर्वानुमान लगाएँ।

**दावा :** कोई भी यह अन्वेषण करके देख सकता है कि यदि पदों की संख्या $2^n$ से भाज्य है, तो SCNN $2^{n-1}$ से भाज्य होगा। उपर्युक्त से हम पाते हैं कि कोई भी संख्या जिसमें एक विषम गुणनखण्ड है, उसे दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखा जा सकता है। तो, कौन-सी संख्याओं को दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में नहीं लिखा जा सकता है?

बिना एक भी विषम गुणनखण्ड वाली कोई भी संख्या अवश्य 2 की घात ही होगी। अतः, केवल $2n \; \forall \; n \in \mathbb{N}$ रूप की संख्याएँ ही वे संख्याएँ हैं जो दो या दो से अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में नहीं लिखी जा सकती हैं।

हम अतिरिक्त प्रश्न के लिए अपने पाठकों से प्रतिक्रियाएँ आमंत्रित करते हैं : N और उसके विषम गुणनखण्ड 2n + 1 के मद्देनज़र किसी भी SCNN में पदों की संख्या का पूर्वानुमान लगाएँ।

•

**सन्दर्भ :**

1. http://highered.mheducation.com/sites/0072533072/student_view0/math_investigations.html
2. https://us.corwin.com/sites/default/files/upm-binaries/7047_benson_ch_1.pdf
3. http://math4teaching.com/2010/03/09/what-is-mathematical-investigation/

------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**स्वाती सरकार** अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एवं विश्वविद्यालय संसाधन केन्द्र में वरिष्ठ व्याख्याता और स्रोत व्यक्ति हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला चित्रकारी है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से बीस्टैट-एमस्टैट और वॉशिंगटन विश्वविद्यालय, सिएटल से गणित में एमएस किया है। वे पाँच वर्षों से अधिक समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं। सभी तरह की व्यावहारिक और क्रियाशील गतिविधियों, विशेषकर ओरिगेमी में उनकी गहरी दिलचस्पी है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**स्नेहा टाइटस** अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एवं विश्वविद्यालय संसाधन केन्द्र में असिस्टेंट प्रोफ़ेसर हैं। गणित के सौन्दर्य, तर्क और प्रासंगिकता को साझा करना उनका जुनून है। स्नेहा ग्रामीण और शहरी स्कूलों के गणित शिक्षकों का मार्गदर्शन करती हैं; वे कार्यशालाओं का आयोजन करती हैं, जिनमें वे समस्या समाधान के माध्यम से कौशल विकास के साथ-साथ गणित पढ़ाने में उपयोग की जाने वाली शैक्षणिक रणनीतियों पर ध्यान केन्द्रित करती हैं। उनसे sneha.titus@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

**अनुवाद** : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण** : सुशील जोशी **कॉपी-एडिटर** : अभिषेक दुबे (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन)
**सम्पादन** : राजेश उत्साही